

英才生学习单设计

鸡兔问题设计的发想与演进

shiangtungliu@gmail.com

刘祥通

数理教育研究所

台湾嘉义大学

鸡兔(龟鹤)问题

- 鸡兔问题给小学生学习分析问题、列表表征问问题、发展解决问题的能力。
- 鸡兔问题的解决方法有列表法、假设法、未知数法、联立方程法。
- 公元五世纪, 数学史上有著名的百鸡问题, 是更深入的鸡兔问题。
- 鸡兔问题可以给中、高年级学生解答, 此问题很有延展性, 深化之后, 它可以给英才生发展思维、逻辑、表征、论述、解题与创造能力。
- Reed (1987) 针对试题提出分类, 包刮: 等价试题(equivalent problem)、同构试题(isomorphic problem)与类似试题(similar problem)。等价与同构试题可以设计基础题, 同构与类似题的组合, 发展出延伸题与挑战题。

小的管子注满油箱需要6小时，大的管子注满油箱需要3小时。如果同时使用两个管子注油，需要多少时间？

等价题	小的管子注满泳池需要12小时，大的管子注满泳池需要8小时。如果同时使用两个管子注水则需要多少时间？
同构题	汤姆开车到比尔家需要4小时，比尔开车到汤姆家需要3小时。若两人同时离开自己的家，开往对方的家，则他们需要多久的时间才会相遇？
类似题 (延伸题)	小的管子注满水箱需要20小时，大的管子注满水箱需要15小时。若排水管流空装满的水箱，需要40小时。如果同时使用大、小两个管子注满水箱，则需要多少时间？(水箱有水时，排水管就开始流水)

鸡兔问题: 兔子有4只脚, 而鸡有2只脚。笼子兔子和鸡共有32只, 共有94只脚。请问兔子跟鸡各有几只?

基础题(同构题): 假设参观美术馆的门票售价如下: 全票150元; 半票60元。已知今天共有200人参观, 总收入为22800元, 则共售出____张全票、____张半票。请写下你的解法或想法。

鸡脚2只、兔脚四只, =>全票150元; 半票60元。

延伸题(同构&深化): 交通违规取缔有一个奖惩制度, 警察开一张罚单且数据正确可奖励150元, 若罚单资料登记有误, 须罚钱75元, 某一个警察这个月开了55张罚单, 这个月结算后得到6450元, 请问他开了几张有效罚单?

奖励为正、罚钱为负; 延伸到正数与负数的组合。

百鸡问题：引自《张丘建算经》

「公鸡每只5文钱，母鸡每只3文钱，3只小鸡1文钱。现在用100文钱买100只鸡，问你这100只鸡里公鸡、母鸡、小鸡各几只？」

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100 \end{cases}$$

根据 x 值的不同，解析出整数解共有 (4, 8, 78)、(8, 11, 81)、(12, 4, 84) 三组。

没有学过联立方程式的学生，以最贵的公鸡价价格5，分别考虑公鸡数4、8、12的情况，如此单纯考虑母鸡与小鸡的组合，变成了三个鸡兔问题的同构试题了。

挑战1 :蜘蛛有8只脚0对翅膀，蝉有6只脚1对翅膀，蜻蜓有6只脚2对翅膀。现已知笼子里有这三种生物，共有25只，其中有166只脚及28对翅膀。求蜘蛛、蝉、蜻蜓各有几只？

已知脚与翅膀的数目，求三种生物各有多少？

挑战2:已知鸡有2条腿，每条腿有5根脚趾；狗有4条腿，前脚5根脚趾，后脚4根脚趾；猪有4条腿，前后脚皆为4根脚趾。已知栅栏内有此三种动物，一共27头，其中我们发现，有38条5趾腿、46条4趾腿，请问鸡、狗、猪各有几只？

已知腿与脚趾数目，求三种动物各有多少？

* 狗很特别，前脚5根脚趾，后脚4根脚趾。

英才生用のワークシートの設計について

—つるかめ算の発想と変化—

shiangtungliu@gmail.com

劉祥通

数理教育研究所

台湾嘉義大学

つるかめ問題

- つるかめ問題は児童の問題分析力、列表で問題証明する能力、発展的な問題解決能力を育成していく。
- つるかめ問題の解決方法は、列表法、仮設法、未知数法、平面方程式。
- 紀元5世紀、数学史上には有名な百鶏問題、もっと深いつるかめ問題がある。
- つるかめ問題は中、高学年の児童の問題解決や、問題の発展、深化等で、英才生の発展的思考、ロジック、表徴、論述、問題解決、創造性、等の能力を伸ばすことができる。
- Reed (1987) による分類:等価問題(equivalent problem)、同じ構成問題(isomorphic problem)、類似問題(similar problem)がある。等価と同じ構成問題は基礎的な問題を設計し、また、同じ構成と類似の組み合わせは、発展的挑戦的な問題を設計できる。

小さいホースで缶に油を注ぐには6時間かかる。大きいホースの場合は、3時間かかる。2本のホースで同時に、注ぐには、どのぐらいの時間かかる。

等価問題	小さいホースで池に水を入れると、12時間かかる。大きいホースの場合は8時間かかる。2本ホースで同時に入れる場合は、どのぐらいの時間かかるか。
同じ構成問題	Tomが車で自分の家から友達の家までには4時間かかる。反対に、Billが車でTomの家までは3時間かかる。もし、2人が同時に自分の家から出発すると、何時間後、二人の車で会うだろう。
類似問題 (発展問題)	小さいホースで水を注ぐと、20時間かかる。大きいホースの場合は15時間かかる。一方、満杯の水槽の水を流すには40時間かかる。では、水を流しながら、大、小のホースで同時に水を注ぐと、水槽が満杯になるには何時間かかるか。

つるかめ問題：ウサギは4本足がある。鶏は2本足がある。庭にウサギと鶏はともに32羽、94本の足がある。ウサギと鶏はそれぞれ何羽だろう？

基礎問題(同じ構成問題)：美術館のチケット料金は、Aチケットは150元/枚、Bチケットは60元/枚。ある日、200人が入場し、合計22800元の料金を納めた。では、AチケットとBチケットはそれぞれ何枚を売り出しただろう。考え方を書いてください。

鶏が2本足、ウサギは4本足，=> Aチケット料金は150元；Bチケット料金は60元。

発展問題(同じ構成問題&深化発展問題)：交通違反の取り締まりには、奨励制度がある。ミスがない罰金書を書いた警察員は、150元の奨励金をもらえる。ミスがある場合は警察員に75元の罰則金が発生する。ある警察員は、ある月に55枚の罰金書を記述して、6450元の奨励金をもらった。では、この警察員は、この1カ月に何枚のミスがない罰金書を書き込んだだろうか。

奨励は正、罰金は負；発展としては正と負の組み合わせ。

百鷄問題:《張丘建算經》より

「雄鷄が1羽で5文，雌鷄が1羽で3文，ひよこが1羽で1文。
では、100文で100羽の鷄を買う時、それぞれの鷄が何羽
だろう?」

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 5x + 3y + \frac{z}{3} = 100 \end{cases}$$

xの数字が異なるにつれて、整数解答として、(4,8,78)、(8,11,81)、(12,4,84)の3つの答えがある。

この方程式をまだ学んでいない子どもは、一番高い雄鷄の数を考えると、4、8、12の答えが一番簡単で、そこから、雌鷄とひよこの組み合わせを考えると、3つのつるかめ問題で同じ構成問題となっている。

挑戦1：蜘蛛は8本の脚と0の羽。蟬は6本の脚と1ペアの羽。蜻蛉は6本の脚と2ペアの羽。箱には3種類の虫が25匹、脚が166本、28ペアの羽がある。では、3種類の虫、それぞれ何羽だろうか。

足と羽の数が分かるので、それぞれの虫の数を求める。

挑戦2：鶏は1つの脚に5本の指がある。犬は4本の脚で、前脚に5本の指、後脚に4本の指がある。豚は4本があって、1つの脚に4本の指がある。庭には、3種類の動物、計27匹で、指5本の脚が38足、指4本の脚が46足。では、3種類の動物はそれぞれ何匹だろうか。

脚と指の数が分かっているから、3種類の動物のそれぞれの数を求められている。

* 注意は犬の場合、前脚と後脚の指が違っていること。